

Inhoud

Rekenen en Leren Leren	2
Rekenportfolio	3
Leren Leren pijlers	3
Zelfbeeld	3
Motivatie.....	5
Memoriseren in plaats van leren	6
Strategieën	7
Globale rekenstrategie.....	7
Opzoekboekjes ja of nee?	8
Getalbegrip	8
Beginnende gecijferdheid & getalbeeld	8
Aftrekken en optellen met G10 beter	9
Rekenkundige symbolen	9
Cijfers	9
Is-gelijk teken (=)	9
Cijfervolgorde: vijftien is geen 51?	10
Gebruik getallenlijnen	10
Van nature logaritmisch.....	10
Concreet in 3D werken met de getallenlijn	11
Gevulde getallenlijn = meetlint.....	11
Lege getallenlijn = redeneerhulpmiddel	12
Gebruik rekenrek.....	13
Getalstructuur	13
Dubbelen en bijna-dubbelen	13
Splitsen	13
Ga niet rekenen met het rekenrek.....	13
Voorbeeldspel sommen rijgen met dobbelstenen	14
Voorbeeldspel min en pluspunten	15
De rol van Friendly mediator bij rekenen	15
Voorbeeld 1	15
Voorbeeld 2	16
Voorbeeld 3	16
De Rol van Coach	17
Foutenanalyse	17
Soorten fouten	17
Oorzaken van fouten	18
Aanpak.....	18
Observeren	18
Vragen	19
Remediëren.....	19

Rekenen en Leren Leren

In dit hoofdstuk komen de belangrijkste van het inhoudelijke rekenessenties en begrippen aan bod, die het leren van rekenen zo soepel en vlotjes mogelijk kunnen laten verlopen.

Voor kinderen geldt:

- Spelen = leren; eerst van 3D naar 2D naar abstract; leren van voorbeelden en rolmodellen.
- Rekenen leer je het meest spelenderwijs: kinderen nemen onbewust beter op dan bewust.
- Bewegend rekenen gaat beter dan niet-bewegend rekenen.

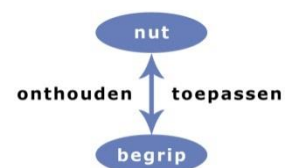


Denken aan het werkwoord "werken" activeert de motorische schors! Wanneer getallen, tellen, sommen, enzovoorts niet gekoppeld zijn aan objecten en bewerkingen in de realiteit is rekenen heel moeilijk. Dan wordt het bijvoorbeeld goochelen met cijfers, trucjes leren zonder werkelijk begrip van wat je doet. $2+3 = 5$ moet relateren aan en een concrete handeling activeren in de hersengedeelten.

Alvorens op de specifieke onderdelen in te gaan, hier eerst een definitie van een aantal belangrijke begrippen:

Leren	Om iets nieuws te leren moeten deze stappen doorlopen worden: Kennen – begrijpen – kunnen – onthouden (voor een uitgebreide toelichting zie ook bladzijde 25, Snel>Doceren).
Automatiseren	Is het proces om te komen tot het uit het hoofd kennen van een concept, som, formule of stappenplan (rekenroutine) en dit zonder moeite kunnen toepassen. Voor het automatiseren kunnen geheugentechnieken gebruikt worden die optimaal van het brein gebruikmaken, al dan niet in combinatie met het oefenen met opdrachten. Een ander woord daarvoor is inprenten. Hoe verder je komt met rekenen, hoe meer het kan zijn dat je de stappen niet nodig hebt of verwoorden kunt. Op een gegeven moment stoppen we immers ook met één-voor-één tellen, we zien bij kleine aantallen voorwerpen dan meteen hoeveel het is. Of weten uit ons hoofd dat $1+2 = 3$. <i>Automatiseren mag niet plaats vinden voordat de leerling wezenlijk begrijpt wat hij doet!</i>
Memoriseren	Memoriseren betekent letterlijk van buiten leren. Automatiseren is een vorm van memoriseren, nl van het memoriseren van stappen. Je kunt ook rekenfeiten uit je hoofd leren en weten. Als je b.v. bij 7 meteen aan de som of splitsing '3 en 4' denkt.
Oefenen	Is een manier om te automatiseren, met als doel de verbindingen tussen hersencellen te verstevigen door gebruik. Op deze wijze ontstaat een patroon dat subiet uit het geheugen opgehaald en toegepast kan worden. VALKUIL: Een bekende valkuil, zeker van onzekere leerlingen, is om alles maar te blijven oefenen. Je kunt echter veel beter gericht oefenen met wat je nog niet kunt zo af en toe oefenen met wat je al kent of kunt om het bij te houden. Zie ook Snel>Leren voor optimale, gemiddelde herhaalfrequenties. Goed opgebouwde stof zorgt automatisch voor herhalingen.

Introduceer een nieuwe bewerking of begrip **zoveel mogelijk** binnen een spelvorm. Het liefst zelfs als ondergeschikt element. Pas wanneer het kind het nieuwe begrijpt, kun je expliciet gaan oefenen voor het eventuele automatiseren. Maar probeer daar weer een spel met wat uitdaging van te maken! Blijf zo lang mogelijk en eventueel ook nieuwe spelvormen aanbieden tot het kwartje gevallen is. Plaats het spel altijd in een real-life context of ontleen het daaraan.



Rekenportfolio

Wij raden aan om leerlingen een rekenportfolio aan te laten leggen voor de versterking van het zelfbeeld en zelfvertrouwen, en ter ondersteuning van de zelfredzaamheid.

Daarin kunnen zij hun vorderingen bijhouden, voorbeeldsommen opnemen waarmee ze een nieuw onderwerp geleerd hebben, formules, tips en suggesties noteren, moeilijke sommen en nieuwe rekenrecepten opnemen.

Tijdens rekenen kunnen zij zo terugvallen op hun eigen materialen in plaats van meteen aan de leerkracht of medeleerling te vragen.

Leren Leren pijlers

De Leren Leren pijlers geven een stevige basis mee aan de leerlingen bij hun aanpak voor leren, dus ook voor rekenen. In de Methode Leren Leren komen alle pijlers aan bod. Hier bespreken we de twee essentiële pijlers van invloed op de houding tegenover rekenen.

Zelfbeeld

Zwakke rekenaars denken dat ze 'niets' kunnen, hebben een heel laag zelfbeeld en weinig zelfvertrouwen op het gebied van rekenen. Zo komen ze terecht in een negatieve, neerwaartse spiraal. Dat kan zelfs de andere leergebieden negatief gaan beïnvloeden.

Ben je zelf onzeker of denk jij echter dat "meisjes" slechter zijn in rekenen, dan zijn de resultaten mogelijk zelfs funest voor de meisjes in je groep:

Onderzoekers van de Universiteit van Chicago (26 januari 2010 in PNAS) vroegen 17 leraressen naar hun angst voor wiskunde. Daarnaast namen zij wiskundetestjes af bij 117 van hun leerlingen, zowel aan het begin, als aan het eind van het schooljaar. Ook moesten de leerlingen twee kinderen tekenen, de een goed in wiskunde, de ander in lezen. Of ze dan jongetjes of meisjes tekenden gaf een beeld of ze bevooroordeeld waren.

Aan het begin van het jaar was er niet veel verschil tussen de jongens en de meisjes. Stereotypes kwamen wel voor, maar overheersten niet en de resultaten van jongens en meisjes waren vergelijkbaar. Maar aan het eind van het jaar bleek een onzekere juf funest voor de resultaten. Zij hadden veel meisjes in hun klas die niet goed waren in rekenen en overtuigd waren van het bekende vooroordeel.

Het stereotype werkt slechte resultaten in de hand, alsof de jonge meisjes niet eens meer proberen hun best te doen, terwijl dit voorafgaand aan het schooljaar niet meespeelde. De onderzoekers vinden dan ook dat leraressen die zelf onzeker zijn in wiskunde goed in de gaten moeten worden gehouden en advies moeten krijgen. De invloed van de juf mag in zulke gevallen in ieder geval niet onderschat worden.

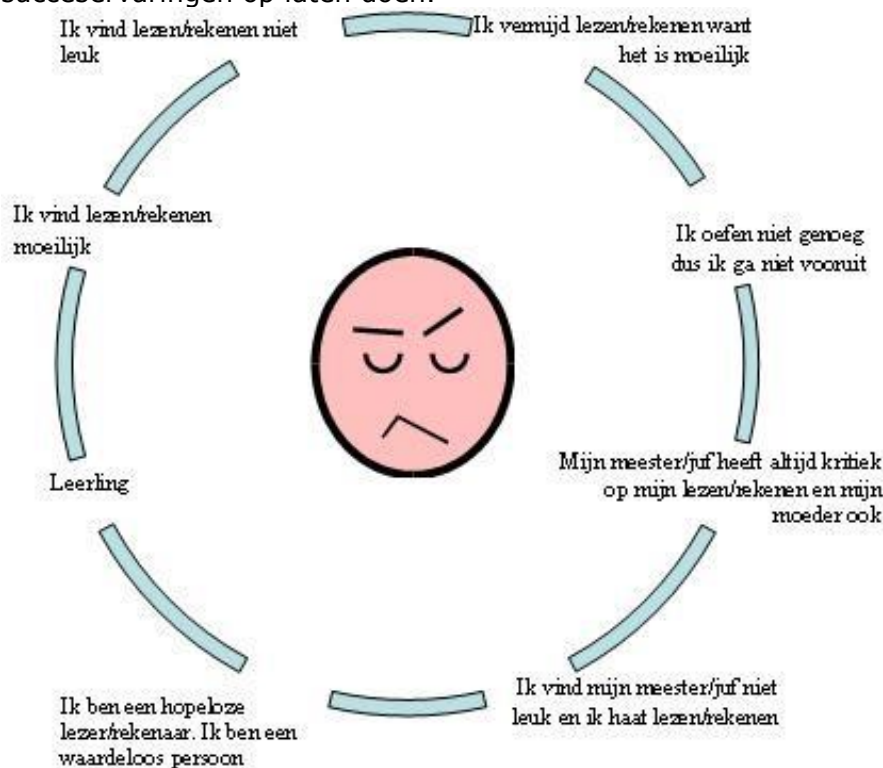
Johan Schaeffer

Bron: <http://www.wetenschap24.nl/nieuws/artikelen/2010/januari/Kunnen-meisjes-wel-rekenen.html>

Nog een voorbeeld van het effect van emoties op leren en presteren:

Angstgevoelens belasten een deel van het visueel-ruimtelijk werkgeheugen, zo denken onderzoekers. En dat heb je nodig voor rekenen en wiskunde. Hoewel **dit onderzoek** specifiek naar de verschillen tussen jongens en meisjes keek, gaat dat feit natuurlijk wel voor iedereen op. In dit onderzoek constateerden ze dat het juist de angstgevoelens waren die uiteindelijk het gevolg van de j/m verschillen op wiskunde opleverden. De meisjes die angstiger waren, presteerden slechter op opgaven die het ruimtelijk inzicht vereisten.

Het ombuigen van onderstaande spiraal begint bij het stilstaan van wat de leerling wel kan en dat expliciteren met behulp van de leerdoelen en leerlijnen. Vervolgens in kleine stapjes weer succeservaringen op laten doen.



(bron: <http://www.rt-terpstra.nl/voor-wie>)



Hersenonderzoek van de Universiteit van Nijmegen heeft aangetoond: bij kinderen tot circa 11 jaar worden de hersencentra betrokken bij leren pas actief bij complimenten en positieve feedback. Van fouten leert de leerling helemaal niet(s).

Met Leren Leren helpen we ze aan de goede strategieën en hun aandacht richten op wat ze wel kunnen. Onderzoek ook vooral wat zich mentaal in hen afspeelt, hoe ze het aanpakken en voor zich zien.

Voorbeeld 1:



Voordat we rekenonderwijs krijgen, hebben we een logaritmische getallenlijn in ons hoofd:

1 5 10 20 30 50 80 140 200 300 ...

Hoe groter de getallen hoe minder groot de onderlinge afstanden worden.

Sommige kinderen hebben een getallenlijn die zo loopt:

... 10 5 1

Dus van rechts naar links. Hun visuele oriëntatie is niet van rechts naar links, maar vice-versa.

De getallenlijn hoort een evenredige verdeling te hebben en (in onze cultuur) van links naar rechts te lopen. Als iemand er aan denkt, zie je op een MRI-scan de visuele schors in het achterhoofd oplichten.

Onderzoek heeft uitgewezen dat we meerdere representatiesystemen, zowel ruimtelijk als niet ruimtelijk, voor getallen in ons hoofd hebben en ook een voorkeur voor de ene of de andere kunnen hebben.

Voorbeeld 2:

Vraag eens langs je neus weg waar bij de leerling de sommen staan. Soms zeggen ze "ik zie niks, het is zwart." Soms zeggen ze bijvoorbeeld iets als:

Ze staan op een muur met bakstenen, sommen die ik ken staan achterop:

Vorkant (werkgeheugen):

		8	X	8	=	???		

Achterkant (lange termijn geheugen):

1+1=2								
		3x8=24						

VOOR ELK KIND KAN HET PLAATJE IN HET HOOFD ANDERS ZIJN!!!!!!!

Niet-functionele plaatjes of stappen vervangen we met Leren Leren voor betere.

Leerlingen weten zelf maar al te goed als er niets meer bij kan. Dan is de muur vol, zowel voor als achter. Geef dan rust, ga wat anders (ontspannends doen). De onderdelen in de hersenen betrokken bij het overbrengen van informatie van het korte naar het lange termijn geheugen (o.a. de hippocampus) werken op de achtergrond door. Van pauzeren word je letterlijk slimmer is aangetoond.

Motivatie



Demotivatie \equiv vermijdingsgedrag.

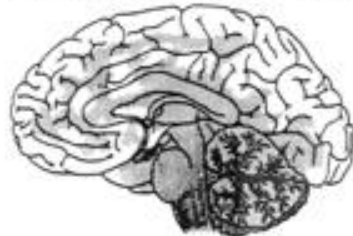
Niet gemotiveerde kinderen bestaan niet. Het is slechts gedrag dat wij dat label hebben gegeven. Van nature zijn kinderen leergierig. Vanaf baby ben je **autodidact**: je stuurt je eigen leerproces. Mits je omgeving de juiste prikkels geeft is groeien onontkoombaar en het allerliefste wat je wilt.

Bij demotivatie wordt het kind gegijzeld door het vecht / vluchtmechanisme van zijn brein. Gedachten als deze worden getriggerd door alleen al te denken aan "rekenen":

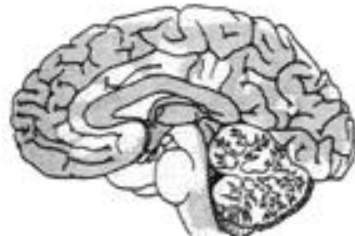
1. dit is te moeilijk voor mij
2. bah, zo saai, veel te weinig uitdaging
3. ik heb echt niets met rekenen, laat mij maar muziek maken
4. ik mag niet zelf bepalen hoe ik het doe
5. ...

En leiden tot het wegsijpelen van energie uit de neo-cortex richting de hersenstam. De amygdala (het emotionele deel) wint het van het "gezond verstand":

BRAIN ACTIVITY IN STATES OF



STRESS, ANXIETY, THREAT, INDUCED
LEARNER HELPLESSNESS



HIGH CHALLENGE, LOW STRESS

De cortex en pre-frontale cortex moeten nog leren te winnen van het emotionele brein. Breng energie eerst weer omhoog door te kijken naar elke succeservaring, hoe klein ook.

Memoriseren in plaats van leren

Sommige kinderen hebben een ijzersterk geheugen en kunnen zo sommen uit hun hoofd leren, zonder te beseffen wat ze doen. Dit kan vooral optreden, indien deze kinderen te lange tijd en te vaak, zonder didactische steun in een werkschrift of oefenprogramma als de Reken tuin werken. Naarmate het moeilijker wordt, vallen ze op een gegeven moment wel door de mand.

Het voordeel is dat wel ze de sommen waarbij ze de onthouden antwoorden invullen, op deze manier meteen automatiseren. Uiteraard is het wel belangrijk, vooral voor later, dat de kinderen ook uit kunnen leggen hoe ze aan het antwoord zijn gekomen. Maak ze hier bewust van en besteed met regelmaat aandacht aan strategieën. De didactische aanpak in combinatie met Leren Leren zorgt ervoor dat leerlingen zich hier van bewust worden. Vraag er concreet naar: hoe en wat gebeurt er in je hoofd. Daarnaast is het belangrijk om samen met het kind aandacht te besteden aan het portfolio. Te laten zien en (door het kind) laten verwoorden welke doelen beheerst worden en aan welke doelen nog gewerkt kan worden.

Zie ook bij de rol van coach verderop.

Strategieën

Een van de belangrijkste pijlers van Leren Leren is de pijler strategie. We onderkennen 4 globale (reken)strategieën en per onderwerp specifieke. In het Nederlands rekenonderwijs is veel te doen over strategieën. In dit document bespreken we diverse onderdelen en hun bijbehorende strategieën en doen een uitspraak over welke het beste gebruikt kunnen worden.

Globale rekenstrategie

Kinderen hebben vaak baat bij dit schema, dat hen bewust maakt van de, globaal gezien, 4 manieren waarop je tot een antwoord kunt komen.

Medaille

Goud



Voor

De weg van het geheugen / **weten.**

$1+1=2$ hoef je niet meer uit te rekenen, dat weet je gewoon.
 $12-9=3$ weten, dat "rekent" het allersnelst. Dan is $112-9$ ook makkelijk.

Zie ook Lereniseenmakkie.nl

Hiervoor gebruik je geheugentechnieken voor inprenten, zoals visualiseren, kettingtechniek en specifiek voor tafels enz.

Maar doe het niet voor je zeker weet dat je begrijpt wat je uitrekent en hoe je dat uitrekent.

Je hoeft natuurlijk niet alles uit je hoofd te leren, maar de basis wel.

Zilver



Rekenrecepten

Ik weet het niet uit mijn hoofd.

Uitgangspunt: eerst 1 strategie volledig automatiseren alvorens een nieuwe toe te voegen.

Strategieën voor rekensommen:

Ik gebruik de handigste en snelste manier, oefen daarmee tot ik de manier helemaal begrijp, uit mijn hoofd.

Als het even kan en zinvol is maak ik er een gouden som van.

Moeilijke sommen bestaan uit vaak uit 2 (of meer) makkelijke sommen, die ik wel uit mijn hoofd ken.

$$8+7 = 15$$

$$18+7 = 10+8+7 = 10+15 = 25$$

$$28+7 = 20+8+7 = 20+15 = 35$$

...

Brons



Schatten

Soms wordt geen antwoord maar een schatting gevraagd.

Schatten kan ik gebruiken bij de 'het-lukt-me test'. Zo kan ik nog een keer controleren of mijn antwoord ongeveer klopt. Dat geeft al een gevoel "mijn uitkomst klopt of juist niet".

Ook kan ik bij multiple choice proberen welk antwoord het zou kunnen zijn, als ik niet meer weet hoe ik het uitrekenen moet.

Troostprijs

Gokken



Als ik het echt helemaal niet weet, levert een gokje altijd nog meer kans op de hoofdprijs dan geen antwoord geven.

Opzoekboekjes ja of nee?

Antwoord:

Jazeker, ze zijn een belangrijk rendementverhogend leermiddel.

Maar.... het liefst niet gelikt en voorgebakken, maar zelf geconstrueerd of nagetekend (uit het hoofd).

Geheugensteuntjes gebruik je totdat je de stof in je hoofd hebt geprent. Een goed voorbeeld van geheugensteuntjes voor rekenen en spelling vind je bijvoorbeeld op <http://opzoekboekje.nl/>. Als een kind zijn eigen kaart moet construeren / construeert geeft dat veel meer rendement en inzicht in zijn denkstappen/proces/fouten. Daarom werken wij het liefst met door leerlingen zelf gemaakte opzoekboekjes. Hiervoor kun je een fotomapje gebruiken (ansichtkaartformaat) met inschuifhoesjes of alles opnemen in het rekenschrift. Stevige kartonnen kaartjes A6 of correspondentiekaarten kunnen gebruikt worden om de eigen K>Weet>Al>prenten op te maken.

<http://www.tbraams.nl/opzoekboekje/aanvullende-kaartjes.pdf>

<http://www.tbraams.nl/opzoekboekje/toelichting-rekenen.pdf>

Getalbegrip

De basis van het rekenen is eigenlijk heel simpel en bestaat uit het toevoegen of het wegnemen van hoeveelheden. Optellen en aftrekken zijn elkaars inverse. Vermenigvuldigen is een bijzondere vorm van toevoegen en delen de inverse bewerking: een vorm van wegnemen of verdelen en splitsen zo je wilt. Rekenen blijft het manipuleren van hoeveelheden, de volledige basisschool lang. Aan de basis staat het begrip 'hoeveelheid' en getalbegrip: weten dat een woord als bijvoorbeeld drie (getal) en later 3 (cijfer) slaat op een hoeveelheid van 3 voorwerpen of mensen. Maar ook dat drie een huisnummer kan zijn of de aanduiding van nummer 3 (de derde) in een rij kinderen. Een getal kan ook allerlei beelden/associaties oproepen, zoals 'De drie musketiers', 'Goudlokje en de drie beren', het lied 'Drie maal drie is negen' of het spel 'Drie is teveel'. Al deze ervaringen met getallen en cijfers dragen bij aan getalbegrip.

Beginnende gecijferdheid & getalbeeld

Beginnende gecijferdheid en het getalbegrip ontstaat vanaf ongeveer 2 jaar. Een kind komt tot een goed getalbegrip wanneer het begrip heeft van verzamelingen, kan classificeren (sorteren) en seriëren (ordenen, op volgorde zetten).

Zie ook de Fasewijzer van Leren Leren voor een meer gedetailleerde beschrijving van de ontwikkeling van deze vaardigheden.

Dit alles ontstaat spelenderwijze door het tellen, manipuleren en werken met voorwerpen en hoeveelheden in het dagelijks leven. Je ouders vragen je b.v. "Wil je 1 of 2 boterhammen, zoek eens je 2 rode sokken?".

Het is daarom zeer belangrijk om leerlingen veel gelegenheid te geven om in 3D te werken met het manipuleren van concreet materiaal (dobbelstenen, dominostenen, bonen of blokjes, eierdozen voor de 10-structuur, kralensnoer, rekenrek, enz.) en de getallenlijn. Ook het lijfelijk ervaren van getallen en hoeveelheden door stappen en sprongen te maken is belangrijk in deze fase. Dat is ook de basis voor de methode van Julie Menne "Met sprongen vooruit".

Voor concrete activiteiten met kleuters raden we "Spelend rekenen met kleuters" aan, zie ook de bronnen.

Aftrekken en optellen met G10 beter

Tijdens bijvoorbeeld Rekenrecept-moment kun je leerlingen uit laten wisselen hoe zij b.v. de som $29 + 14$ oplossen. De kinderen werken dan in groepjes en bespreken met elkaar hoe ze de som oplossen. Dit zouden de uitkomsten kunnen zijn:

- Verdelen in tientallen en eenheden. Een leerling van het eerste groepje heeft eerst de 20 en de 10 opgeteld: dit is 30. Toen de 9 en de 4, dat is 13. Toen de 10 van de 13 bij de 30 en daarbij de 3, dat is 43.
- Bijtellen of aftellen. Een leerling van het tweede groepje vertelt dat ze eerst de tientallen erbij heeft geteld: $29 + 39$. En daarna de 4 erbij: $40 + 41 + 42 + 43$.
- Gebruik maken van makkelijke getallen. Makkelijke getallen zijn veelvoud van 10 of andere getallen waarmee je makkelijk kunt werken. Een leerling van het derde groepje zegt: 'Ik weet dat $30 + 15$ is 45. $29 + 14$ is twee minder, dus het is 43'.
- Vertalen in een nieuw probleem. Een leerling van het vierde groepje heeft van de 14 er eentje afgenomen en bij de 29 gedaan om er 30 van te maken. Toen had hij $30 + 13$, en dat is $30 + 10 + 3$ en dat is 43.

Uit onderzoek blijkt:

Bij de **G10-methode** laten de leerlingen **het eerste getal heel** om achtereenvolgens eerst het beoogde aantal tientallen en daarna het beoogde aantal eenheden bij te voegen en/of af te halen. De opgave $34 + 25$ wordt dan opgelost via $34 + 20 = 54$ en $54 + 5 = 59$. En $65 - 38 = 65 - 30 - 8 = 27$

Leerlingen die de G10-methode gebruiken blijken veel succesvoller dan de leerlingen die de 10-10-methode gebruiken: $34 + 25 = 30 + 4 + 20 + 5 = 50 + 9 = 59$. (Zie <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/5824.pdf> en Beishuizen (1983, 1985)) Bij de 10-10 methode worden veel vergissingen gemaakt, vooral bij aftrekken.

Voor het kunnen toepassen van de G10 methode moeten kinderen veel oefenen met en gememoriseerd hebben van het optellen van tientallen bij diverse getallen.

Rekenkundige symbolen

Laat je niet foppen en laten we het simpel houden: in de wiskunde hebben we altijd veel haast. Daarom hebben we leuke afkortingen en tekeningen bedacht voor allerlei lange woorden en zinnen. En opdat we **precies** weten wat we ergens mee bedoelen.

Cijfers

Dus 3 is niets anders is dan een tekening (of met een duur woord 'symbool') voor het woord en getal 'drie'.

Is-gelijk teken (=)

Bij veel kinderen niet bekend, dat is jammer. Want ik kan zeggen:

"Een en nog een erbij dat is twee bij elkaar."

Of:

"Als ik een bij een optel dan krijg ik twee."

Dit is toch veel korter:

Een en nog een erbij dat is twee bij elkaar. → 1 en nog 1 erbij dat is 2 bij elkaar →

$1 + 1 = 2$

Met een echte balans (Schubi rekenmateriaal) kun je aan de handen van de weegschaal plastic kaartjes hangen. Als je links 4 hangt, dan moet je rechts bij de 1 de 3 hangen of bij de 2 nog een 2. Dat het teken '=' is gelijk aan betekent, is soms een openbaring. Is de som aan de weegschaal niet gelijk, dan is de som dus fout.

Cijfervolgorde: vijftien is geen 51?

Het handigste is om kinderen die daar moeite mee hebben uit te leggen dat wij nou eenmaal getallen anders uitspreken dan opschrijven.

Kinderen die blijven omkeren kunnen gebaat zijn met deze ezelsbruggen, totdat het moeiteloos zonder gaat:

Tip 1:

Welk tiental hoor je in het getal, schrijf dat op. De nul van dit tiental maak je groter, zodat daar de enen in kunnen worden geschreven.

2 ①

Tip 2:

Als je achttien hoort, dan zeg je tegen jezelf: dat is tien en acht. In die volgorde ga je ook schrijven, eerst de 1 van 10 en dan de 8, je laat de 0 van 10 hier wel weg.

Gebruik getallenlijnen

Gevulde getallenlijnen komen in het dagelijks leven voor in allerlei vormen. Van meetlint tot de ronde wijzerplaten van klokken en toerentellers. Vanaf de onderbouw moeten kinderen hiermee leren werken.

De lege getallenlijn moet bewust neergezet worden als niets meer dan een hulpmiddel om oplossingsmanieren mee te leren begrijpen en beschrijven, oplossingen te vinden voor die problemen die het werkgeheugen teveel belasten of visualiseren van een probleem om zo een aanpak voor de berekening te vinden. Ook moet de lege getallenlijn weer losgelaten kunnen worden, sommen met +, -, = gerepresenteerd worden en geautomatiseerd. Een kind van 11 moet de lege getallenlijn niet meer nodig hebben voor de som 12-9.

Van nature logaritmisch

(bron onder meer: <http://www.rekeneninbeeld.nl/Tellen.htm>).

Wat ligt er precies midden tussen 0 en 10? De meeste westerlingen zullen 5 zeggen, maar kinderen denken meer aan 3 of 4, net als de Mundurucu-indianen in het Amazonegebied. De mentale schaalverdeling waarbij tussen alle getallen evenveel ruimte zit, lijkt aangeleerd.

Tellen en ruimtelijk inzicht hebben veel met elkaar te maken. Niet alleen zijn het alle twee ingrediënten voor een wiskundeknobbel, ook de bijbehorende hersengebieden zijn goed op elkaar aangesloten.

Getallen kun je je dan ook gemakkelijk voorstellen als punten op een schaalverdeling. Bij de meeste westerlingen is die schaalverdeling, in ieder geval voor kleine getallen, een lineaal: tussen de 1 en de 2 zit evenveel ruimte als tussen de 8 en de 9. Toch is deze 'lineaire' interne getallenschaal niet de enig mogelijke, of zelfs maar de meest natuurlijke. Uit onderzoek is gebleken dat mensen bij continue of grote hoeveelheden, bijvoorbeeld liters water of grote geldbedragen, redeneren volgens een 'logaritmische' schaal. Daarop ligt 1 even ver van 10 als 10 van 100 ligt. Hoe groter de hoeveelheden, hoe kleiner de afstanden ertussen.

Zo kun je gemakkelijk getallen van heel verschillende ordes van grootte vergelijken, en de typische schattingsfout is ongeveer overal op de schaal even groot: bij 'een stuk of tien' mag je er één à twee naast zitten, en bij 'een stuk of honderd' tien à twintig.

Kinderen gebruiken deze 'logaritmische' schaal ook bij kleine getallen, heeft eerder onderzoek naar de mentale verwerking van getallen uitgewezen. Pas later verschijnt de lineaire schaal. De vraag is of dat een natuurlijke ontwikkeling is, of een culturele verworvenheid, een gevolg van rekenonderwijs en de vertrouwdheid met linealen, grafieken, en andere lineaire getallenrijtjes in de westerse wereld.

Concreet in 3D werken met de getallenlijn

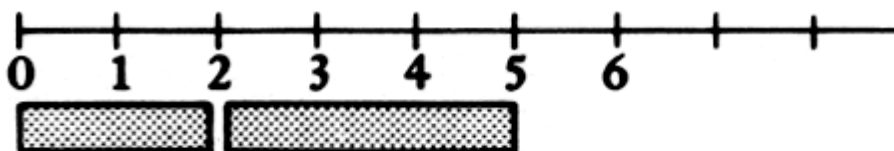
Zaag b.v. 1 of 2 grote rollen behang in 4-en en rol ieder stuk uit. Breng er samen met de kinderen maatverdelingen op aan, elke tiende streep langer dan de eerste 10. 1 streep = 1 stapje, een sprong = 10. Geef elk groepje van 4 kinderen een rol en laat ze elkaar opdrachten geven om stappen of sprongen vooruit en achteruit te laten gaan. Laat ze er tegelijk de cijfers bij zetten. Voor jonge kinderen houd je het eerst bij 10 eenheden, dan pak je er nog weer 10 bij, enzovoorts.

Of gebruik bijvoorbeeld goedkope papieren centimeters van de bouwmarkt (IKEA) en knip die dan samen met de kinderen in stukken van tien. De herhaling is voor veel kinderen een openbaring. Ook kun je de getallenlijn verticaal voorstellen, bijvoorbeeld als een thermometer. Op deze manier wordt 'groter' aan 'hoger' gekoppeld en 'kleiner' aan 'lager'. Of timmer samen met de kinderen een lat met honderd spijkertjes en gebruik voor de tientallen koperen spijkers. Dat is veel werk! Honderd is veel... Meer dan... Ga je naar rechts dan worden het er steeds meer en naar links minder.

Gevulde getallenlijn = meetlint

Een meetlint is een belangrijk hulpmiddel waarmee kinderen moeten kunnen werken. Daarnaast helpt het ze om structuren in getallen te leren zien:

- meten met de basismeeteenheid en een maat van tien basiseenheden; de leerlingen oefenen zo in het structureren van getallen in tientallen en eenheden
- constructie van een meetstrip als model van afpassen van maten van tien en van één
- oplossen van opgaven rond toevoegen, afhalen en vergelijken met behulp van de meetstrip; de meetstrip biedt de mogelijkheid meet- en telstrategieën te vervangen door rekenstrategieën; hier wordt gebruik gemaakt van de kennis opgedaan bij het structureren van getallen in tientallen en eenheden

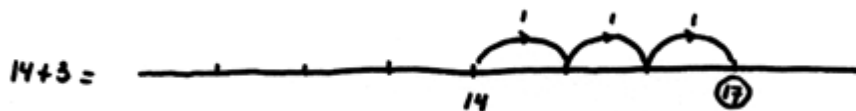


$$2 + 3 = 5$$

$$5 - 3 = 2$$

- Het getal komt altijd onder het streepje te staan en is aanduiding voor de hoeveelheid stapjes, eenheden of hokjes die ervoor liggen (kardinaal getal - meetlint).
- Bij erbij tellen of eraf trekken wordt het getal zelf niet meegeteld.
- Het antwoord wordt omcirkeld of onderstreept.

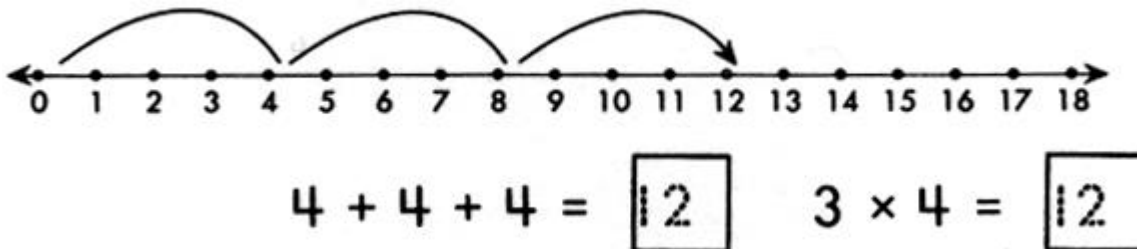
Bij **optellen** komen de bogen die de stappen of sprongen voorstellen, met het getal **erboven**, het goede antwoord omcirkeld of onderstreept:



Bij **aftrekken** komen de bogen die de stappen of sprongen voorstellen, met het getal **eronder**, het goede antwoord omcirkeld of onderstreept:



De getallenlijn kan ook gebruikt worden om de relatie tussen optellen en vermenigvuldigen te laten zien:



Lege getallenlijn = redeneerhulpmiddel

Deze wordt vooral gebruikt als (communicatie)middel om de strategieën van leerlingen bij rekenen inzichtelijk te maken. "Hoe pak jij het aan?". Maar, pas wel op! Controleer of het kind er ook daadwerkelijk mee werken kan. Kan het zelf de getallenlijn vullen? Die stap moet eerst plaatsvinden, voor het kind de lege getallenlijn kan hanteren voor optellen en aftrekken.

Essentieel is dat ook de leerlingen zich ervan bewust zijn dat je met de sprongen op de getallenlijn beschrijft hoe je redeneert en laat zien welke steunpunten je op de meetlat gebruikt wanneer je lengten met elkaar vergelijkt, lengten bij elkaar neemt of de éne lengte bij de andere lengte in mindering brengt.

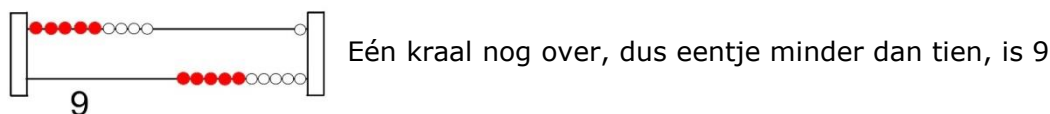
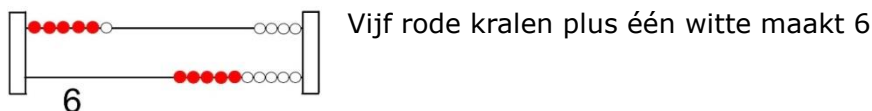
Gebruik rekenrek

Het instrument abacus is al zo oud als de weg naar Rome. Bedreven abacus-rekenaars kunnen veel berekeningen sneller uitvoeren dan personen die gebruik maken van een zakrekenmachine. Bron: [http://nl.wikipedia.org/wiki/Abacus_\(reken_tuig\)](http://nl.wikipedia.org/wiki/Abacus_(reken_tuig))
In het rekenonderwijs gebruiken we het telraam echter alleen bij het aanvankelijk leren rekenen.

Getalstructuur

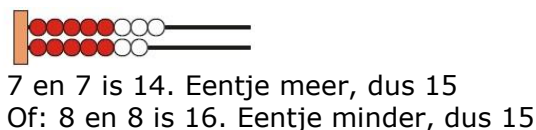
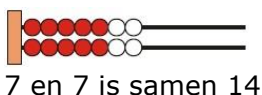
Het rekenrek is een hulpmiddel om kinderen te helpen bij het zien van getalstructuren. Het rekenrek maakt gebruik van de vijfstructuur; aan elke draad zitten vijf rode en vijf witte kralen. Je kunt de koppeling maken naar de vijf vingers van de linkerhand (rode kralen) en de vijf vingers van de rechterhand (witte kralen). Belangrijk is kinderen duidelijk te maken dat de kralen een andere kleur hebben om makkelijk een aantal te kunnen herkennen. Rood en wit zijn hetzelfde 'waard', alleen de kleur verschilt.

De kralen worden in het begin één voor één tellend van rechts naar links geschoven om het gewenste aantal te krijgen. In één oogopslag zie je dan zo het aantal kralen links. Later kan een leerling met 5 tegelijk schuiven of zelfs direct het juiste aantal.



Dubbelen en bijna-dubbelen

De dubbelen en bijna-dubbelen kunnen makkelijk herkend en geleerd worden met het rekenrek.



Splitsen

Het rekenrek helpt bij het herkennen van de 'vriendjes van tien'. Zoals: 6 en 4, 3 en 7. En bij het splitsen van de andere getallen tot tien.

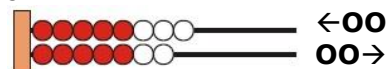


4 kun je splitsen in 2 en 2

Ga niet rekenen met het rekenrek

Voor het uitrekenen van sommen is het rekenrek niet zo geschikt, ten eerste doordat de kralen vast zitten aan de draad. Ten tweede: de werkwijze van optellen met het rekenrek is verwarrend, bijvoorbeeld de som

$$8 + 7 = ?$$



De leerling telt eerst het totaal. Dan zouden er op de onderste draad twee kralen naar rechts geschoven moeten worden, op de bovenste twee naar links om (netjes) 15 te krijgen. Als leerlingen zo leren werken met het rekenrek, dan worden ze verleid te blijven tellen.

Bij het uit het hoofd uitrekenen van zo'n som is het dan de bedoeling dat kinderen het rekenrek weer voor zich zien. Dit lukt lang niet bij iedereen. Is het rekenrek de 'deur uit' kunnen kinderen vaak niet terugvallen op het eerder geleerde en gaan ze soms (weer) op de vingers tellen.

Voorbeeldspel sommen rijgen met dobbelstenen

Spel voor 2 personen.

Gooi met 1, 2, of 3, of ... dobbelstenen tegelijk en vorm de eerste som op papier.
Gooi dan weer en tel dat bij de vorige uitkomst op. Controleer elkaars rekenwerk.
Foutje: -1. Bij -2 of -3 stoppen we:

$$2+4 = 6 \rightarrow 6 + \dots = xx \rightarrow xx + \dots = yyy$$

Gooi je met twee of meer dobbelstenen, dan kun je ook vragen om de ogen eerst uit het hoofd uit te rekenen voor je het bij de uitkomst van de vorige optelt. Je kunt natuurlijk ook op allerlei manieren variëren: Is de som van de dobbelstenen lager dan 6 (ofzo), dan moet je aftrekken.

Spannend, wie krijgt het hoogste getal als het spel klaar is!!!!!!!!!!

Voorbeeldspel min en pluspunten

Bij een wedstrijd kun je strafpunten (minpunten) en pluspunten verdienen. Daarmee leren rekenen is de start van werken met negatieve getallen. Dit spel is te doen met elk kind dat tot 10 of verder tellen en terugtellen kan, ook leuk voor buiten. Doe het eerst een aantal keren voor de groep voor met een kind of doe zelf mee:

Bedenk bijvoorbeeld een simpel spelletje voor tweetallen. In dit voorbeeld met een stressballetje. Gooi eerst een aantal malen over en weer. Als de bal de grond raakt, krijgt de ontvanger een minpunt. Schrijf ieder je eigen score op, b.v.:

-1
-2
-3
-4

Heb je aardig wat minpuntjes verzameld, ga je pluspunten toevoegen. Verander de regels, b.v. Gooi de bal goed aan, zodat de ander hem goed kan vangen. Heeft de ander hem opgevangen, dan krijgt hij een pluspunt. Zo niet, dan krijg jij een minpunt. Een kind dat een pluspunt verdient, kan nu zelf of met jouw hulp bedenken wat het aantal minpunten dan wordt. Bijvoorbeeld:

Rick maakte van -4 +5. Dus ik zei: "Joh, je hebt nu toch een minpuntje minder, want je hebt nu een pluspunt gewonnen!" Oh ja, dus hij veranderde de -3 boven de -4 in +3. Ik zei: "Sorry, ik leg het niet goed uit. Laten we eerst even teruggaan naar het begin: er stond -3 en daaronder -4. Toen kreeg jij een pluspunt, dus gaan we terugtellen en na -4 komt nu weer -3." Het kwartje viel toen meteen en vlekkeloos gingen we zo door met mijn score, want nu was ik weer aan de beurt: -5, -6, -5, ..

De rol van Friendly mediator bij rekenen

Voorbeeld 1

Marieke gaat rekenen met een computerprogramma of werkblad. Ze staart moedeloos naar het scherm of werkblad.

FM: "Wat scheelt eraan, je kijkt zo sip?"

"Ik moet nog zoveel doen! Dat red ik nooit vandaag..."

FM: "Zoveel sommen overdonderen je?"

"Ja, ik weet niet waar ik moet beginnen."

FM: "Als je aan het Lereniseenmakkie Werkboek denkt, waar doet je dit aan denken?"

"Nou... wat er gebeurt als je iets moeilijk vindt, of het teveel is?"

"Mmmm..."

"...De salamitechniek!"

"Hoe zou je de salamitechniek hier kunnen gebruiken?"

"Ik begin eerst met wat ik het makkelijkst vind. Als dat klaar is, houd ik één minuutje pauze en ga ik door met het volgende."

FM: "Ik zie dat je weer moed hebt gekregen; prima! Met welk domein ga je starten?"

"Met tellen!"

"Succes!"

Voorbeeld 2

Geert in groep 5 is om een groepje kinderen heen aan het spelen, zit niet achter zijn computer. FM: Kijkt mee op het moment dat hij weer in de buurt van zijn PC is en ziet dat er niets gestart is.

FM: He, lukt het starten niet? Kan ik helpen?

Geert: start het programma op en gaat wat sommen maken.

FM: blijft er bij staan en merkt dat het langzaam gaat, Geert lijkt te gokken en veel fouten gemaakt worden.

FM: Ik zie dat je het allemaal nog erg lastig vindt, kun je me vertellen hoe je deze som probeert op te lossen?

Geert: komt er niet uit en kan dat niet aangeven.

FM merkt dat zelfs de eenvoudigste sommen niet lukken en constateert dat Geert extra hulp nodig heeft.

Voorbeeld 3

Friendly mediator	NOT SO Friendly mediator
<p><i>Jongens, het is weer tijd voor rekenen. Denk aan je leerdoelen voor deze week. Bedenk hoeveel en wat je vandaag wilt doen. En bedenk even waarmee je dat wilt en kunt bereiken.</i></p>	<p><i>Je moet 30 minuten in Ambrasoft en daarna 30 minuten in een werkblad. We werken in stilte.</i></p>
<p>Loopt rond, informeert belangstellend hoe het gaat. Gaat af en toe naast een leerling zitten om te vragen wat deze nog lastig vindt.</p> <p>Leerlingen vragen trouwens elkaar als eerste altijd om hulp en dan pas de juf/meester</p>	<p>Zit op zijn/haar stoel, achter bureau. Treedt corrigerend op bij elk gesproken woord.</p> <p>Wacht af tot een kind met een vraag bij hem/haar komt en geeft dan antwoord of kapt af, omdat ze geen tijd heeft: ze moet de rust bewaren.</p>
<p>Juf/meester kent Kimmie's leerstijlen en talenten goed en gaat even naast Kimmie zitten. Kimmie houdt namelijk veel meer van knutselen dan van rekenen. Daarom doet juf/meester even een klein spelletje met haar of laat haar werken aan een gecombineerd knutsel/rekenspelletje. Kimmie en zij hebben hulp van de Leren Leren coach gekregen, zodat Kimmie nu beter weet hoe zij graag leert, hoe juf en zij rekenen leuker voor haar kunnen maken en hoe zij beter kan omgaan met situaties waarin dat niet altijd kan. Juf/meester complimenteert haar uitgebreid met de sommen die ze heeft gedaan.</p>	<p>Kimmie zit aan het bureau van de juf te werken, onder haar toezien oog. <i>Kimmie is namelijk lui. Ze kan het wel, maar ze vindt niets op school leuk.</i></p>
<p>Juf/meester ziet dat 2 meisjes aan het spelen zijn met elkaar ipv met de stof. Ze gaat er even bij zitten. <i>Lukt het dames? Waar gaan jullie mee aan de slag, wat ben je van plan? De computer is toch niet vastgelopen?</i> Beiden gaan meteen aan de slag.</p>	<p><i>Dames, ophouden en aan het werk!</i></p>

Juf/meester ziet dat Daan bezig is met een niet-rekenspel. Ze gaat erbij zitten en vraagt hem of hij al klaar is met zijn leerdoelen van vandaag? En of dit spel met rekenen te maken heeft? Ze kan zich goed voorstellen dat het ook een leuk spel is om te spelen. Ze vraagt wat een beter moment is om dit spel te spelen. Ze spreken samen af dat hij het spel niet onder schooltijd speelt, maar thuis en nu weer verder gaat met rekenen.

Juf/Meester roept Daan op boze toon bij zich. *Daan, dit is de laatste keer. Als je nu niet aan rekenen gaat, dan wordt het vanaf morgen een week lang zonder de computer!*

De Rol van Coach

Iedereen is er van overtuigd: "fouten maken mag en is leerzaam". Om ten volle naar deze overtuiging te leven, is het goed om er nog even bij stil te staan wat dit dan praktisch gezien betekent:

- Reageer altijd luchtig op fouten, zeg bijvoorbeeld iets als: "laten we even bekijken wat er mis is gegaan; volgende keer gaat je vast wel lukken".
- Maak zelf ook fouten, durf ze toe te geven en lach er samen om.
- In het begin van een nieuw onderwerp maak je meestal meer fouten dan verderop. Laat je niet te snel uit het veld slaan. Ga echter niet te lang door, want onze hersenen zijn kanjers in het maken van patronen. Uitslijpen van een verkeerd patroon kost meer energie dan het meteen goed aanleren
- Het is dus fijn als je veel sommen gemaakt hebt; maar minstens zo belangrijk is het, dat je de leerstof goed *begrijpt*
- Als leerling heb je altijd recht op inzage en analyse van de gemaakt fouten, ook van toetsen. Het is een van de beste bronnen om van te leren.
- Als je iets even niet meer weet of een fout hebt gemaakt, dan zoek je het gewoon opnieuw op. Meteen zorg je ervoor dat je het weer (opnieuw) memoriseert of vastlegt in je Rekenjournaal.
- Vragen staat vrij. De domste vraag is de vraag die niet gesteld wordt. Als leerkracht biedt je altijd hulp of antwoord, je plaatst nooit een neerbuigende opmerking.

Foutenanalyse

Onderstaande inventarisatie beschrijft veel voorkomende (denk)fouten bij rekenen en hoe dit te coachen.

Soorten fouten

Dit veelgemaakte fouten bij (hoofd)rekenen:

- Spiegelen van getallen in de opgave ($32-10=31$)
- Spiegelen van het antwoord ($13+22=53$)
- 0-fout ($8.000-4.000=7.600$)
- 0 vergeten ($6.000+2.000=800$)
- Operator fout ($9-5=14$)
- Gedeeltelijk operator fout ($45+11=54$)
- Leenfout ($90-19=81$)
 - Bewaarfout ($224+69=283$)
 - Omkeerfout ($86-28=62$)
 - Telfout ($54+21=77$)

Oorzaken van fouten

Soms heb je bij het analyseren van de fouten al een vermoeden waardoor deze gemaakt zijn. Ook dan blijft het verstandig om met het kind in gesprek te gaan, om erachter te komen wat het probleem precies is. Oorzaken kunnen zijn:

- Slordigheid (denk bijvoorbeeld aan een rechter hersenhelfter die te gehaast sommen maakt, zonder goed op details te letten)
- Gokken, bijvoorbeeld uit onzekerheid
- Een naastgelegen leerdoel (t.o.v. de sommen waar veel fouten in zijn gemaakt) is nog niet bereikt
- Kind heeft meer uitleg of oefening nodig

Aanpak

Voordat je gaat behandelen of remediëren, ga je tijdens het rekenen naast het kind zitten en onderzoek je (door middel van observeren, vragen, doorvragen en luisteren) wat het probleem precies is. Dit doe je vanuit een open en geïnteresseerde houding. Je bent nieuwsgierig naar de strategieën die het kind gebruikt om de gegeven opgaven op te lossen. Hiervoor gebruik je de sommen waar het kind mee bezig is of die het al eerder heeft gemaakt. Tegelijkertijd houd je de leerdoelen (en de nabij gelegen leerdoelen) in het achterhoofd. Mocht een kind helemaal niet uit een opgave komen, dan kun je sommen aanbieden vanuit een leerdoel dat hiervóór ligt. Andersom kan natuurlijk ook; als een kind goed uit de voeten kan met de aangeboden sommen, kun je sommen kiezen uit een volgend leerdoel.

Observeren

Tijdens de observatie kun je letten op de volgende signalen:

- Neemt het kind de tijd om zich te oriënteren op de opgave of gaat het lukraak aan de slag?
- Geeft het binnen enkele seconden antwoord of duurt het (veel) langer?
- Telt het kind (openlijk zichtbaar of bijna verborgen) op de vingers? Of gebruikt het (waarschijnlijk) objecten in de omgeving als houvast om te tellen, zoals lamellen voor het raam of ribbels van de radiator? Let ook op knikjes van het hoofd, oogbewegingen (op en neer), zachtjes prevelen.
- Als er een aantal vingers, als antwoord, over is; telt het kind deze dan één voor één of ziet het de hoeveelheid in één oogopslag?
- Gebruikt het kind concreet materiaal? Maakt het aantekeningen/schema's/plaatjes?
- Welke strategie(ën) hanteert het kind?
- Welke oogbewegingen laat het zien? Over het algemeen kun je hieruit afleiden dat:



Leerling kijkt je recht aan → de som geautomatiseerd is (bijv. $2 \times 9 = 18$ wordt binnen 2 sec. beantwoord)

Leerling kijkt naar (zijn) linksboven → visueel constructief aan het werk met de opgave. Bijvoorbeeld $3 \times 4 =$ → Ziet $4 + 4 + 4$ objecten voor zich, of bijv. een getallenlijn met sprongen

Leerling kijkt naar (zijn) linksonder → communiceert in gedachten met zichzelf (over de opgave)

Leerling kijkt naar (zijn) rechtsboven → roept bewust of onbewust een visuele herinnering op. Bijvoorbeeld ziet $7 \times 8 = 56$ als visueel beeld voor zich ziet, of ziet zich op de vingers tellen.

Vragen

We leren het meest van zelf uitleggen. Hoe vaak heb je zelf ook niet ervaren, dat wanneer je hulp ergens vroeg en moest uitleggen wat het probleem was, ineens de oplossing zag? Behalve van observeren maak je dus ook gebruik van (door)vragen die dat uitleg of denkproces op gang helpen. Je volgt het denkproces zo goed mogelijk en "luistert" ook goed naar verbale en non-verbale uitingen. Het spreekt voor zich dat open vragen de voorkeur genieten boven gesloten en suggestieve vragen. Denk hierbij bijvoorbeeld aan vragen als:

- Hoe heb je deze som uitgerekend?
- Wat doe je als eerste, bij zo'n som? Wat daarna?
- Aan welk soort sommen doet deze opgave jou denken?
- Zou je eens hardop kunnen vertellen wat je nu in jouw hoofd denkt?
- Wat zie je in jouw hoofd?
- Waardoor komt het, dat je deze som hebt overgeslagen?
- Hoe tel je dit (op)?
- Ken je nog een manier om dit uit te rekenen? Welke?
- ...

Remediëren

Afhankelijk van de aard van het probleem, kun je hier op verschillende manieren mee om gaan en dat weer grotendeels bepaald door de aard van het probleem, de leerstijl van het kind en de beschikbare middelen:

- Je laat het kind zelf alle stappen nog een keer goed opschrijven en uitwerken in zijn of haar Rekenjournaal.
- Je geeft het kind nogmaals instructie en daarna oefeningen, dat hoeft jij niet zelf te doen, dat kunnen ook je digitale middelen zijn.
- Je gaat een stapje terug qua leerstof/leerdoel en geeft hierover instructie en oefeningen
- Je geeft het kind meer en/of andere oefenstof
- Je werkt met het kind aan nauwkeurig kijken en werken

De bovenstaande wijze van begeleiden van het leerproces is onderdeel van de LQ Talent Coaching, een manier om kinderen met leerproblemen effectief te helpen. Een uitgebreide handleiding van LQ Talent Coaching en voorbeelden van casussen, vind je in de handleiding bij de methodiek Lereniseenmakkie Werkboek.